Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 2 (2) (2014), 9-24

ZANIMLJIVI ZADACI O BROJU 2014 (I)

Dušan J. Simjanović
Prirodno-matematički fakultet u Nišu
dsimce@gmail.com

Branimir V. Lapčević
OŠ „Stojan Novaković" Blace
banelapcevic@gmail.com

Jelena Radonjić
STŠ „ Vožd Karađorđe" i OŠ „Radovan Kovačević - Maksim" Lebane
jecika82@gmail.com

Milan S. Stamenković
Elektronski fakultet u Nišu
milanstamenkovic@live.com

Dragi čitaoče, pred tobom je mala, ali nadamo se, zanimljiva skupina zadataka u kojima se javlja broj 2014. Preovladavaju zadaci iz algebre, pažljivo sortirani i detaljno rešeni, slični onima koji se često postavljaju na opštinskim i regionalnim takmičenjima. Nadamo se da ćeš marljivim rešavanjem usavršiti svoje matematičke veštine.

Zadatak 1 *Odrediti proste(ne nužno različite) brojeve* p, q, r *i* s *takve da je* $p \cdot q \cdot (r+s) = 2014$.

Rešenje: Kako je $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$, to je $\{p, q, r+s\} \in \{2, 19, 53\}$. Kako ne postoje dva prosta broja čiji je zbir jednak 2 ili 53, mora biti $r + s = 19$. Zbog toga što je 19 neparan broj, jedan od prostih brojeva r i s mora biti paran, a drugi neparan, odnosno jedan od tih brojeva je 2, a drugi 17.
Iz svega pomenutog imamo da je

$$\{p, q\} \in \{2, 53\} \text{ i } \{r, s\} \in \{2, 17\}.$$

Skup rešenja je

$$S(p, q, r, s) = \{(2, 53, 2, 17), (2, 53, 17, 2), (53, 2, 2, 17), (53, 2, 17, 2)\}. \quad \square$$

Zadatak 2 *Nađi sve cifre x, y, z i t takve da važi*

$$\overline{xyzt} + \overline{xyz} + \overline{xy} + x = 2014.$$

Rešenje: Najpre uočimo da je $1 \leq x \leq 9$ i $0 \leq y, z, t \leq 9$. Data jednakost je ekvivalentna sa jednakošću

$$1000x + 100y + 10z + t + 100x + 10y + z + 10x + y + x = 2014,$$

odnosno sa

$$1111x + 111y + 11z + t = 2014.$$

Kako su y, z i t nenegativni brojevi, zaključujemo da je $x = 1$. Odavde je

$$111y + 11z + t = 903.$$

Kako su z i t nenegativni brojevi, zaključujemo da je $y < 9$. Kako je još $11z \leq 99$ i $t \leq 9$, lako zaključujemo da je $y > 7$, što znači da je $y = 8$. Dalje je $11z + t = 15$, odakle lako zaključujemo da je $z = 1$ i $t = 4$.
Dakle, $x = 1$, $y = 8$, $z = 1$ i $t = 4$. $\square$

Zadatak 3 *Dokazati da je* $2014,201420142014\ldots$ *racionalan broj.*

Rešenje: Neka je $2014,201420142014\ldots = x$. Tada je

$$10000x = 20142014,20142014\ldots \text{ , pa je}$$

$$10000x - x = 9999x =$$

$$20142014,20142014\ldots - 2014,201420142014\ldots$$

$$= 20140000.$$

Odavde je $x = \frac{20140000}{9999}$. $\square$

Zadatak 4 *Kada iz skupa od* 10 *uzastopnih prirodnih brojeva izbacimo jedan od njih, zbir ostalih* 9 *brojeva jednak je* 2014. *Koji su to brojevi?*

Rešenje: Neka su dati prirodni brojevi oblika x, $x+1$, $x+2$, $\dots$, $x+8$, $x+9$, a izbačeni broj $x+y$, gde je $0 \leq y \leq 9$.

Iz uslova zadatka sledi da je

$$x + x + 1 + x + 2 + \cdots + x + 9 - (x + y) = 2014,$$

odnosno da je

$$\begin{aligned} 9x + 45 - y &= 2014 \\ 9x &= 1969 + y. \end{aligned}$$

Kako broj $1969 + y$ mora biti deljiv sa 9, zaključujemo da je $y = 2$, iz čega sledi da je $x = 219$. Traženi brojevi su $219, 220, 221, \dots, 228$. $\square$

Zadatak 5 *Rešiti sistem jednačina*

$$\begin{aligned} |x| + y + z &= 2010 \\ x + y + z &= 2012 \\ x + y + 2z &= 2014. \end{aligned}$$

Rešenje: Oduzimanjem druge od treće jednačine dobijamo da je $z = 2$. Sada važi da je

$$\begin{aligned} |x| + y &= 2008 \\ x + y &= 2010. \end{aligned}$$

Oduzimanjem druge od prve jednačine dobijamo da je

$$|x| - x = -2.$$

Razlikujemo dva slučaja :

1. $x \geq 0$

$$\begin{aligned} x - x &= -2 \\ 0 &= -2, \text{ sledi da nema rešenja.} \end{aligned}$$

2. $x < 0$

$$\begin{aligned} -x - x &= -2 \\ x &= 1 \Rightarrow \text{nema rešenja.} \end{aligned}$$

Dati sistem jednačina nema rešenja. $\square$

Zadatak 6 *Zbir nekih* 2014 *prirodnih brojeva je neparan broj. Dokazati da je proizvod tih brojeva paran broj.*

Rešenje: Ukoliko bi u zbiru bio paran broj neparnih sabiraka, ukupan zbir bi bio paran broj, što je nemoguće, odakle zaključujemo da u zbiru ima neparan broj neparnih sabiraka. Odavde zaključujemo da je u zbiru i neparan broj parnih sabiraka, dakle broj veći od 0. Pošto se u zbiru nalazi bar jedan paran broj, zaključujemo da je proizvod tih brojeva paran broj. $\square$

Zadatak 7 *Odredi prirodan broj x tako da važi jednakost $x^{2014} = x^{2013} + 2013$.*

Rešenje: Iz date jednakosti dobijamo da je $x^{2014} - x^{2013} = 2013$. Ako je x paran broj, onda su x^{2014} i x^{2013} parni brojevi, pa njihova razlika, koja je takođe paran broj, ne može biti neparan broj 2013.

Ako je x neparan broj, onda su x^{2014} i x^{2013} neparni brojevi, pa njihova razlika, koja je paran broj, ne može biti 2013. Zaključujemo da ne postoji prirodan broj koji zadovoljava datu jednakost. $\square$

Zadatak 8 *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2014}$ prirodni brojevi za koje važi da je*

$$\sum_{i=1}^{2013} {x_i}^2 = {x^2}_{2014}.$$

Dokazati da su bar dva od tih brojeva parna.

Rešenje: Pretpostavimo da su svi brojevi neparni. Ako je n neparan broj, $n = 2k+1$, onda je $n^2 = 4k(k+1) + 1 \equiv_8 1$, jer je jedan od brojeva k i $k+1$ sigurno paran. Zato je ${x^2}_{2014} \equiv_8 1$. Sa druge strane imamo da je

$$\sum_{i=1}^{2013} {x_i}^2 \equiv_8 5,$$

što je kontradikcija. Pretpostavimo da je tačno jedan od brojeva $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2014}$ paran. Ako je to x_{2014}, onda je svaki od brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ neparan, pa sledi da je neparan i zbir njegovih kvadrata, što je kontradikcija. Ako je neki od brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ paran,recimo x_1, onda je paran broj ${x_1}^2$ jednak broju ${x^2}_{2014} - \sum_{i=2}^{2013} {x_i}^2$, koji je očigledno neparan, što je kontradikcija. Iz prethodnog sledi da među brojevima koji zadovoljavaju uslov zadatka moraju da budu bar dva parna broja. $\square$

Zadatak 9 *Dokazati da je*

$$2014^{2014} - 2014 \equiv_{1254} 0.$$

Rešenje: Primetimo da je $1254 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19$. Kako je

$$2014^{2014} - 2014 = 2014 \cdot (2014^{2013} - 1)$$

i

$$2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53,$$

jasno je da je broj $2014^{2014} - 2014$ deljiv sa 2 i 19. Kako je još i

$$2014^{2013} - 1 \equiv_3 1^{2013} - 1 \equiv_3 0,$$

to je broj $2014^{2014} - 2014$ deljiv i sa 3. Slično, iz

$$2014^{2013} - 1 \equiv_{11} 1^{2013} - 1 \equiv_{11} 0,$$

sledi da je broj $2014^{2014} - 2014$ deljiv i sa 11. Odatle, kako su brojevi 2, 3, 11 i 19 uzajamno prosti, zaključujemo da je broj $2014^{2014} - 2014$ deljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 = 1254$. $\square$

Zadatak 10 *Neka su x i y prirodni brojevi i $xy = 2013^{2014}$. Dokazati da broj $x + y$ nije deljiv brojem 2012.*

Rešenje: Jasno je da je 2013^{2014} neparan broj, iz čega sledi da su brojevi x i y takođe neparni. Sledi da je proizvod $(x + 1)(y + 1) \equiv_4 0$, odnosno da je $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1 = 2013^{2014} + x + y + 1 \equiv_4 0$. Kako je $2013 \equiv_4 1$, to je i $2013^{2014} \equiv_4 1$, odakle je $2013^{2014} + 1 \equiv_4 2$. Dakle, mora važiti da je $x + y \equiv_4 2$. Kako $4|2012$, sledi da zbir $x + y$ nije deljiv brojem 2012. $\square$

Zadatak 11 *Dokazati da postoje prirodni brojevi x, y i z čiji je zbir kvadrata jednak $6^{2^{2014}}$.*

Rešenje: Indukcijom ćemo dokazati da se svaki broj oblika 6^{2^n} može predstaviti u obliku zbira tri potpuna kvadrata, tj. da za svaki prirodan broj n postoje prirodni brojevi x_n, y_n i z_n, takvi da je

$$x_n{}^2 + y_n{}^2 + z_n{}^2 = 6^{2^n}.$$

Za $n = 1$ možemo uzeti $x_1 = 4$, $y_1 = 4$ i $z_1 = 2$.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za neki prirodni broj n i dokažimo da tvrđenje važi i za prirodni broj $n + 1$. Brojeve x_{n+1}, y_{n+1} i y_{n+1} izabraćemo korišćenjem brojeva x_n, y_n i z_n na sledeći način:

$x_{n+1} = {x_n}^2 + {y_n}^2 - {z_n}^2$, $y_{n+1} = 2y_nz_n$ i $z_{n+1} = 2x_nz_n$.

Sada dobijamo

$$ {x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2 + {z_{n+1}}^2 = ({x_n}^2 + {y_n}^2 - {z_n}^2)^2 + (2y_nz_n)^2 + (2x_nz_n)^2 = $$

$$ ({x_n}^2 + {y_n}^2 + {z_n}^2)^2 = (6^{2^n})^2 = 6^{2^{n+1}}, $$

što je i trebalo dokazati. □

Zadatak 12 *Dat je niz brojeva tako da je svaki član tog niza, počev od drugog jednak zbiru njegova dva susedna člana. Zbir prvih* 8 *članova je* 7*, a zbir prvih* 29 *članova je* 3*. Odrediti zbir prvih* 2014 *članova tog niza.*

Rešenje: Označimo sa a prvi i sa b treći član tog niza. Na osnovu uslova zadatka, zaključujemo da je dati niz oblika

$$ a,\ a + b,\ b,\ -a,\ -(a + b),\ -b,\ a,\ a + b,\ b,\ \ldots $$

Dakle, niz je peridičan sa periodom dužine 6. Primetimo da je zbir prvih 6 članova jednak 0, jer imamo 3 para suprotnih brojeva. Štaviše, na osnovu prethodne činjenice sledi da je zbir svakih 6 uzastopnih članova jednak 0. Kako je zbir prvih 8 članova jednak 7 i $8 = 6 + 2$, zaključujemo da je

$$ a + a + b = 2a + b = 7. $$

Kako je zbir prvih 29 članova jednak 3 i $29 = 4 \cdot 6 + 5$, zaključujemo da je

$$ a + a + b + b + (-a) + (-(a + b)) = b = 3. $$

Odavde zaključujemo da je $a = 2$.
Konačno, kako je $2014 = 6 \cdot 335 + 4$, zaključujemo da je zbir prvih 2014 članova niza jednak

$$ a + a + b + b + (-a) = a + 2b = 2 + 2 \cdot 3 = 8. \quad \square $$

Zadatak 13 *Odredi poslednje dve cifre broja* 6^{2014}.

Rešenje: Neposrednim izračunavanjem utvrđujemo da se brojevi 6^2, 6^3, 6^4, 6^5, 6^6, $6^7, \ldots$ završavaju redom ciframa 36, 16, 96, 76, 56, $36, \ldots$.

Dakle, periodično se ponavljaju poslednje cifre sa periodom od 5 brojeva. Kako je $2014 = 4 + 5 \cdot 402$, to se 6^{2014} završava istim ciframa kao 6^4, dakle sa 96. □

Zadatak 14 *Prvi broj niza je* 7*, a svaki sledeći broj se dobija tako što se prethodni kvadrira, saberu se cifre i doda* 1*. Tako su sledeća dva člana niza* 14 *i* 17*. Odrediti* 2014*. član niza.*

Rešenje: Izračunajmo još nekoliko sledećih članova niza :

$$7,\ 14,\ 17,\ 20,\ 5,\ 8,\ 11,\ 5,\ 8, \ldots$$

Počev od petog člana niz postaje periodičan tako što se ponavljaju tri člana: $5, 8$ i 11.

Kako je

$$2014 = 4 + 2010 = 4 + 3 \cdot 670,$$

2014. član niza će biti poslednji od tri broja koja se ponavljaju, odnosno broj 11. □

Zadatak 15 *Prvi član niza je* 3^{2014}*. Svaki sledeći član niza, počev od drugog, jednak je zbiru cifara prethodnog člana. Odrediti* 2014*. član tog niza.*

Rešenje: Iskoristićemo činjenicu da je broj deljiv sa 9, ako je zbir cifara tog broja deljiv sa 9. Kako je $3^{2014} = 9 \cdot 3^{2012}$, zaključujemo da je svaki član datog niza deljiv sa 9.

Kako je $3^2 < 10$, sledi da je $3^{2014} = (3^2)^{1007} < 10^{1007}$, odnosno da broj 3^{2014} nema više od 1007 cifara. Drugi član niza nije veći od $9 \cdot 1007 = 9063$. Zbir cifara drugog člana je manji od 36, odakle zaključujemo da je treći član niza broj 9, 18 ili 27. Zbir cifara bilo kog od ovih brojeva je 9, pa zaključujemo da je svaki član niza, počev od četvrtog, jednak 9. □

Zadatak 16 *Niz prirodnih brojeva* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *definisan je sa* $a_1 = 3$ *i* $a_{n+1} = 3^{a_n}, n \geq 1$*. Odrediti poslednje dve cifre brojeva* a_{2013} *i* a_{2014}*.*

Rešenje: Podsetimo se pojma Ojlerove funkcije:

Za proizvoljan prirodan broj $n > 1$, Ojlerova funkcija $\varphi(n)$ označava broj

svih prirodnih brojeva manjih od n koji su uzajamno prosti sa n.
Neka je n prirodan broj i $p_1, p_2, \ldots, p_k$ prosti brojevi koji se pojavljuju u rastavljanju broja n na proste činioce, pri čemu se broj p_1 pojavljuje α_1 puta, p_2 α_2 puta, ..., p_k α_k puta. Tada je

$$n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_k}^{\alpha_k} \ .$$

Može se pokazati da ako je $n = {p_1}^{\alpha_1} {p_2}^{\alpha_2} \ldots {p_k}^{\alpha_k}$ kanonska faktorizacija broja n, tada je

$$\varphi(n) = n \cdot \Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{1}{p_2}\Big) \cdot \quad \ldots \quad \cdot \Big(1 - \frac{1}{p_n}\Big).$$

Ojlerova teorema ima sledeću formulaciju:
Neka je $a \in \mathbf{Z}$ i $m > 0$ tako da je $(a, m) = 1$. Tada je $a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$.

Kako je $(3, 4) = 1$, i $(3, 25) = 1$, po Ojlerovoj teoremi imamo da je $3^2 \equiv_4 1$ i $3^{20} \equiv_{25} 1$, pa je $3^{20} \equiv_{100} 1$. Iz $a_1 = 3$ i $a_2 = 3^3$ sledi da je

$$a_3 = 3^{a_2} = 3^{27} = 3^{20} \cdot 3^7 \equiv_{100} 1 \cdot 3^7 \equiv_{100} 81 \cdot 27 \equiv_{100} 87.$$

Ako je $a_n \equiv_{100} 87$, tada je $a_n = 100k + 87 = 20(5k + 4) + 7$, odakle je

$$a_{n+1} = 3^{a_n} = 3^{100k+87} = (3^{20})^{5k+4} \cdot 3^7 \equiv_{100} 3^7 \equiv_{100} 87.$$

Dakle, $a_n \equiv_{100} 87, n \geq 3$. Brojevi a_{2013} i a_{2014} se završavaju ciframa 87. $\square$

Zadatak 17 *Ako je*

$$A = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{2013 \cdot 2014}$$

i

$$B = \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \cdots + \frac{1}{2014},$$

uporediti brojeve A i B.

Rešenje: Kako je

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \tag{1}$$

imamo da je

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}\quad ;\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\quad ;\quad \dots\quad ;\quad \frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}.$$

Sada je

$$A=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2014}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots\frac{1}{2014}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1007}+B-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1007}\right)=B$$

Dakle, $A=B$. $\square$

Zadatak 18 *Ako je*

$$2A=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2014},$$

izračunati A.

Rešenje: Koristeći formulu za zbir prvih n prirodnih brojeva $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, imamo da je

$$1+2=\frac{2\cdot 3}{2};\quad 1+2+3=\frac{3\cdot 4}{2};\quad 1+2+3+\cdot+2014=\frac{2014\cdot 2015}{2}.$$

Sada je

$$2A=\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}\cdots+\frac{2}{2014\cdot 2015}$$

$$A=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}\cdots+\frac{1}{2014\cdot 2015},$$

odnosno primenom (1),

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015},$$

odnosno

$$A = \frac{2014}{2015}. \quad \square$$

Zadatak 19 *Data je jednačina $7x + 2y = 2014$. Izračunati zbir apcisa svih parova prirodnih brojeva (x_i, y_i) koji zadovoljavaju datu jednačinu.*

Rešenje: Kako je $7x + 2y = 2014$, to je $7x = 2(1007 - y)$, pa je $x = 2k$. Sada je $14k = 2(1007 - y)$, pa je $y = 1007 - 7k$.
Kako su $x_i > 0$ i $y_i > 0$, to je i $k > 0$ i $1007 - 7k > 0$, pa je $0 < k < \frac{1007}{7} = 143\frac{6}{7}$. Dakle,

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + 2 \cdot 143 =$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 143) = 2 \cdot \frac{143 \cdot 144}{2} = 143 \cdot 144. \quad \square$$

Zadatak 20 *Dati su brojevi $a = 2^{\sqrt{\log_2 2014}}$ i $b = 2014^{\sqrt{\log_{2014} 2}}$. Uporedi ih.*

Rešenje: Kako je

$$\log 2^{\sqrt{\log_2 2014}} = \sqrt{\log_2 2014} \cdot \log 2 = \frac{\sqrt{\log 2014}}{\sqrt{\log 2}} \cdot \log 2 = \sqrt{\log 2014 \cdot \log 2},$$

i

$$\log 2014^{\sqrt{\log_{2014} 2}} = \sqrt{\log_{2014} 2} \cdot \log 2014 = \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\log 2014}} \cdot \log 2014 = \sqrt{\log 2014 \cdot \log 2},$$

zaključujemo da je $a = b$. $\square$

Zadatak 21 *Na tabli je ispisano 2014 jedinica. Dozvoljeno je da izbrišemo dva od zapisanih brojeva i umesto njih napišemo četvrtinu njihove sume. Ovaj postupak ponavljamo sve dok na tabli ne ostane samo jedan broj. Pokazati da poslednji preostali broj nije manji od $\frac{1}{2014}$.*

Rešenje: Podsetimo se definicija aritmetičke i harmonijske sredine, kao i nejednakosti između njih.

Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ data n-torka pozitivnih brojeva.
Tada je harmonijska sredina $H_n(a)$ brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definisana izrazom

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Aritmetička sredina $A_n(a)$ brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definiše se izrazom

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Za bilo koju n-torku a pozitivnih brojeva važi da je $H_n(a) \leq A_n(a)$. Jednakost važi kada je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Kada pozitivne brojeve a i b zamenimo njihovom četvrtinom, zbir recipročnih vrednosti svih napisanih brojeva se ne povećava, jer iz nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine dobijamo da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Preostali broj biće veći od $\frac{1}{2014}$, jer će jednakost u AH nejednakosti važiti samo kada su brojevi na koje se sredine primenjuju jednaki. $\square$

Zadatak 22 *Koliko ima pozitivnih celih brojeva oblika*

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$$

kod kojih je $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$ *i koji imaju ne više od* 2014 *cifara?*

Rešenje: Svakom broju datog oblika možemo priključiti tačno jedan niz dužine 2014 koji ima sledeći oblik

$$00\ldots011\ldots122\ldots2\ldots99\ldots9$$

i bar jedan član različit od nule. Ovakvih nizova, s obzirom na to da su u pitanju kombinacije sa ponavljanjem, ima $\binom{2014+10-1}{2014}$, odnosno $\binom{2023}{9}$. Zato, brojeva datog oblika ima $\binom{2023}{9}$. $\square$

Zadatak 23 *Brojevi* 2^{2014} *i* 5^{2014} *napisani su jedan za drugim. Koliko cifara ima tako dobijeni broj?*

Rešenje: Neka zapis broja 2^{2014} ima m cifara, a zapis broja 5^{2014} n cifara. Jasno je da zapis traženog broja onda ima $m+n$ cifara. Važi da je

$$10^{m-1} < 2^{2014} < 10^{m}$$
$$10^{n-1} < 5^{2014} < 10^{n}.$$

Množenjem odgovarajućih strana ovih nejednakosti, dobijamo

$10^{m+n-2} < 10^{2014} < 10^{m+n}$, odnosno $m+n-2 < 2014 < m+n$.

Odavde je $2014 < m+n < 2016$, a kako je $m+n \in \mathbf{N}$, zaključujemo da je $m+n = 2015$.

Broj dobijen zapisivanjem cifara brojeva 2^{2014} i 5^{2014} jedan za drugim ima tačno 2015 cifara. $\square$

Zadatak 24 *Rešiti po x jednačinu*

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}} = \sqrt{2014},$$

gde se koren na levoj strani javlja beskonačno mnogo puta.

Rešenje: Obeležimo $A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\dots}}}$. Kako je $A = \sqrt{2014}$ i $A = \sqrt{xA}$, zaključujemo da je $x = A = \sqrt{2014}$. $\square$

Zadatak 25 *U skupu celih brojeva rešiti jednačinu*

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1+\frac{1}{2014}\right)^{2014}.$$

Rešenje: Ova jednačina se može napisati u obliku

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{2015}{2014}\right)^{2014}.$$

Kako je $NZD(x, x+1) = 1$, razlomak $\frac{x+1}{x}$ je redukovan, pa su redukovani i razlomci $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$ i $\left(\frac{2015}{2014}\right)^{2014}$ i imaju jednake brojioce i imenioce.

Važi i

$$\left(\frac{2015}{2014}\right)^{2014} = \left(\frac{-2014}{-2015}\right)^{-2014} = \left(\frac{-2015+1}{-2015}\right)^{-2015+1},$$

odnosno

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1} = \left(\frac{-2015+1}{-2015}\right)^{-2015+1}.$$

Odavde sledi da je $x+1 = -2015+1$, odnosno da je $x = -2015$. $\square$

Zadatak 26 *U skupu realnih brojeva rešiti jednačinu*

$$2014^{\log_{2012}(x-1)} - 2012^{\log_{2014}(x+1)} = 2.$$

Rešenje: Neka je $a = \log_{2012}(x-1)$ i $b = \log_{2014}(x+1)$. Sada se početna jednačina transformiše u $2014^a - 2012^b = 2$. Kako je

$$2012^a = 2012^{\log_{2012}(x-1)} = x - 1 \text{ i}$$

$$2014^b = 2014^{\log_{2014}(x+1)} = x + 1,$$

sledi da je $2014^b - 2012^a = 2$, pa je $2014^a - 2012^b = 2 = 2014^b - 2012^a$, odakle dobijamo da je

$$2014^a + 2012^a = 2014^b + 2012^b.$$

Kako je funkcija $2014^x + 2012^x$ strogo rastuća sledi da je $a = b$. Jednačina se svodi na $2014^a - 2012^a = 2$, odnosno

$$\left(\frac{2014}{2012}\right)^a = 1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2012}\right)^a.$$

Kako je u poslednjoj jednačini funkcija na levoj strani strogo rastuća, a na desnoj strogo opadajuća, jednačina može imati najviše jedno rešenje, $a = 1$. Rešenje početne jednačine je $x = 2013$. $\square$

Zadatak 27 *Neka je z kompleksan broj takav da je $z + \frac{1}{z} = 1$. Izračunati*

$$z^{2014} + \frac{1}{z^{2014}}.$$

Rešenje: Množenjem leve i desne strane jednakosti $z + \frac{1}{z} = 1$ sa z dobijamo da je

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Množenjem leve i desne strane poslednje jednakosti sa $z + 1$ dobijamo da je

$$z^3 + 1^3 = 0, \text{ odnosno } z^3 = -1.$$

Kako je

$$z^{2014} = (z^3)^{671} \cdot z = -z \text{ i}$$

$$\frac{1}{z^{2014}} = \frac{1}{-z}, \text{ sledi da je}$$

$$z^{2014}+\frac{1}{z^{2014}}=-z+\frac{1}{-z}=-(z+\frac{1}{z})=-1.$$

Napomena: Iz $(z+\frac{1}{z})^2=1$, sledi da je $z^2+\frac{1}{z^2}=-1$.
Slično, iz $(z+\frac{1}{z})^3=1$, sledi da je $z^3+\frac{1}{z^3}=-2$.
Kako parni stepeni izraza $z+\frac{1}{z}$ sadrže samo parne stepene brojeva z i $\frac{1}{z}$, a neparni samo neparne, izračunavanje se svodi na prethodna dva slučaja. Ostavljamo čitaocu za vežbu da reši ovaj zadatak na ovaj način. □

Zadatak 28 *Naći sve uređene parove* $(a,b)\in\mathbf{R^2}$ *takve da je*

$$(a+ib)^{2014}=a-ib.$$

Rešenje: Neka je $z=a+ib$ kompleksan broj koji ispunjava uslove zadatka. Zaključujemo da je

$$z^{2014}=\bar{z},\ \text{ odnosno da je } |z|^{2014}=|z|.$$

$$|z|^{2014}=|z|\Leftrightarrow|z|(|z|^{2013}-1)=0\Leftrightarrow|z|=0\vee|z|^{2013}=1.$$

Iz $z=0$ sledi da je $a=0$ i $b=0$.
Iz $|z|^{2013}=1$ sledi da je $|z|=1$. Množenjem jednakosti $z^{2014}=\bar{z}$ sa z dobijamo

$$z^{2015}=z\bar{z}=|z|^2=1,\ \text{ odakle sledi da je}$$

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{2015}+i\sin\frac{2k\pi}{2015},\ \ k=1,2,\dots,2015.$$

Podsetimo se da su ovo 2015. koreni jedinice. Konačno, skup rešenja naše jednačine je

$$\{(0,0)\}\cup\{(\cos\frac{2k\pi}{2015},\sin\frac{2k\pi}{2015})\ \mid\ k=1,2,\dots,2015\}.\quad\square$$

Zadatak 29 *Odrediti realni i imaginarni deo broja*

$$z=\Big(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2014}+\Big(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2014}.$$

Rešenje: Kako je broj $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ treći koren iz -1, a broj $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ treći koren iz 1 dobijamo da je

$$z=\Big(\tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2014}+\Big(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^{2014}=\Big(\Big(\tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)^3\Big)^{671}\cdot\Big(\tfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\Big)+$$

$+ \left(\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3\right)^{671} \cdot \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) = (-1)^{671} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + 1^{671} \cdot \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{-1-i\sqrt{3}-1+i\sqrt{3}}{2} = -1.$

Dakle, $Re(z) = -1$, $Im(z) = 0$. $\square$

Zadatak 30 *Dokazati da za $p \geq 0$ važi nejednakost*

$$\left(2014^p\right)^{1-2014^p} + \left(2014^{2p}\right)^{1-2014^{2p}} + \cdots + \left(2014^{2014p}\right)^{1-2014^{2014p}} \leq 2014.$$

Kada važi jednakost?

Rešenje: Kako je $p \geq 0$, za $k > 0$ imamo da je $kp \geq 0$, pa je $2014^{kp} \geq 1$. Odavde sledi da je $1 - 2014^{kp} \leq 0$, pa je $\left(2014^{kp}\right)^{1-2014^{kp}} \leq 1$.
Sabiranjem ovih nejednakosti za $k = 1, 2, 3, \ldots, 2014$, dobijamo

$$\left(2014^p\right)^{1-2014^p} + \left(2014^{2p}\right)^{1-2014^{2p}} + \cdots + \left(2014^{2014p}\right)^{1-2014^{2014p}} \leq 2014.$$

Jednakost će važiti ako i samo ako je $p = 0$. $\square$

U vreme kada matematika, i prirodne nauke uopšte, nisu omiljeni predmet u školi, cilj ovoga rada, a uskoro i njegovog nastavka, je da unese svežinu u nastavu matematike i zaintrigira i zagolica maštu onom malom broju đaka koji se interesuju za ovu lepu nauku.

Literatura

[1] V. Mićić, Z. Kadelburg, D. Đukić, *Uvod u teoriju brojeva, materijali za mlade matematičare, sveska 15*, DMS, Beograd 2004.

[2] S. B. Branković, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za srednje škole*, odabrana poglavlja, Zavod za udžbenike, Beograd 2007.

[3] *Tangenta 10*, Zbirka zadataka objavljenih u rubrici "zadaci iz matematike" časopisa *Tangenta* 1995 - 2005. godine, priredio B. Popović, DMS, Beograd 2006.

[4] I. Dolinka, *Elementarna teorija brojeva: moji omiljeni zadaci*, DMS, Beograd 2007.

[5] V. Baltić, D. Đukić, Đ. Krtinić, I. Matić, *Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji*, DMS, Beograd 2008.

[6] M. Stanić, N. Ikodinović, *Teorija brojeva -zbirka zadataka*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 2004.

[7] R. Tošić, D. Milošević, *Brojevi - nestandardni zadaci*, Arhimedes, Beograd 1996.

[8] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović *Analiza sa algebrom 2*, Krug, Beograd 2002.

[9] V. Andrić *Matematika* $x = 1236$*, Priručnik za pripremanje za takmičenje učenika osnovnih škola od IV do VIII razreda* , Krug, Beograd 2006.

[10] Društo matematičara Srbije, *Matematička takmičenja srednjoškolaca, godišta* 2006/07 – 2011/12.

[11] Z. Kadelburg, P. Mladenović, *Savezna takmičenja iz matematike,* , Društvo matematičara Srbije, Materijali za mlade matematičare, sveska 23, Beograd 1990.

[12] B. Marinković, D. Stošić - Miljković, *Par-nepar*,Materijali za mlade matematičare, sveska 167, Arhimedes, Beograd 2013.

[13] Časopis „Tangenta” , broj 58/2, godina 2009/10, Društvo matematičara Srbije

[14] Časopis „Tangenta” , broj 52/4, godina 2007/08, Društvo matematičara Srbije